

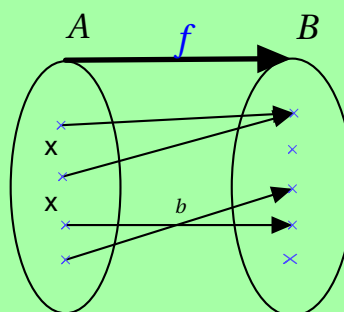
Chapitre 3

Limites et continuité

3.1 Rappel sur les fonctions

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On appelle "**fonction f définie de A vers B ($f : A \rightarrow B$)**" une relation entre A et B qui à tout élément de A associe au plus un élément de B .

Diagramme



Remarque 4

- ★ Les éléments de A sont appelés **les antécédents**
- ★ Les éléments de B sont appelés **les images**

$$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto f(x) \quad x : \text{antécédents} ; f(x) : \text{images}$$

3.1.1 Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ qui admettent des images dans l'ensemble d'arrivée. Cet ensemble est noté D_f .

$$D_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe} \}$$

Exemple 17

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln(1 - x)$$

$$D_f =]-\infty; 1[$$

3.1.2 Une application

Une application est une fonction tel que son ensemble de définition représente son ensemble de départ.

Exemple 18

$$f : \mathbb{R} - \{0; 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{2x+1}{x(x-1)} \text{ est une application car}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

3.1.3 Propriété- Opérations arithmétiques sur les fonctions

Soient f et g deux fonction admettant respectivement D_f et D_g comme ensemble de définition.

- ★ Les fonctions $f + g$ ou $f - g$ et $f \times g$ sont définie sur $D_f \cap D_g$
- ★ La fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur $D_f \cap D_g$ avec $g(x) \neq 0$
- ★ La composition $f \circ g$ est définie sur

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f, \quad f \circ g(x) = f(g(x))\}$$

3.1.4 Propriétés générales sur les fonctions

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application

★ On dit que f est une fonction constante sur I si et seulement si $\forall x_1$ et $x_2 \in I$, $f(x_1) = f(x_2)$.

★ On dit que f est une fonction croissante sur I si et seulement si $\forall x_1$ et $x_2 \in I$ tel que $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

★ On dit que f est une fonction décroissante sur I si et seulement si $\forall x_1$ et $x_2 \in I$ tel que $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

★ On dit que f est une fonction paire sur I si et seulement si $\forall x, -x \in I$ $f(x) = f(-x)$.

Exemple 19

La fonction

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \text{ n'est pas paire sur } [0; +\infty[$$

Par contre

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \text{ est paire sur } \mathbb{R}$$

Remarque 5

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Domaine d'étude : $[0; +\infty[\cap D_f$ ou $]-\infty; 0] \cap D_f$.

★ f est une fonction impaire sur I si et seulement si $\forall x, -x \in I$ et on a : $f(-x) = -f(x)$.

Remarque 6

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Domaine d'étude : $[0; +\infty[\cap D_f$ ou $]-\infty; 0] \cap D_f$.

★ f est une fonction périodique de période T sur I si et seulement si :
 $\forall x \in I, (x + T) \in I$ et on a : $f(x + T) = f(x)$.

Exemple 20

La fonction $f(x) = \cos(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$ sur $\mathbb{R}$.
 $g(x) = \tan(x)$ est périodique de période $T = \pi$ sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Remarque 7

Pour étudier une fonction périodique de période T , on prend comme domaine d'étude un intervalle d'amplitude T . Le reste la courbe, est obtenu par une translation $T\vec{i}$.

Exemple 21

$$De = \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \right] \cap D_f$$

f est une fonction lipschitzienne sur I si et seulement si $\forall x_1$ et $x_2 \in I, \exists k > 0$ tel que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|$$

On utilise cette propriété pour prouver l'existence des solutions d'une équation différentielle.

Remarque 8

Lorsque $0 < k < 1$, f est une fonction contractante.

3.2 Les limites

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \notin I$ et $l \in \mathbb{R}$. f admet pour limite l lorsque x tend vers x_0 si et seulement si les valeurs $f(x)$ peuvent être rendues aussi proche de l que l'on veut en prenant des x suffisamment proche de x_0 . Ceci est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \eta > 0 / \forall x \in I, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

C'est encore équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

La notation $x \rightarrow x_0$ représente le voisinage de x_0 .

3.2.1 Limite à gauche- Limite à droite

☆ On dit que f admet une limite l_1 à gauche de x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \eta > 0 / \forall x \in I, x_0 - \eta \leq x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Ce qui équivaut à

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1, \quad l_1 \in \mathbb{R}$$

☆ On dit que f admet une limite l_2 à droite de x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \eta > 0 / \forall x \in I, x_0 \leq x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Ce qui équivaut à

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2, \quad l_2 \in \mathbb{R}$$

☆ Pour que f admette une limite l en x_0 , il faut et il suffit que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

$f(x) = \left(\frac{x^3 + |x| + x}{x} \right) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
 Etudiez la limites de f en 0.

Solution 5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_{<}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0_{<}} \left[\left(\frac{x^3 + |x| + x}{x} \right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_{<}} \left[\left(\frac{x^3 - x + x}{x} \right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_{<}} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ \lim_{x \rightarrow 0_{<}} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

On démontre aussi que $\lim_{x \rightarrow x_0_{>}} f(x)$ n'existe pas.

3.2.2 Théorème d'encadrement

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 telles que :
 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution 6

$\forall x \in \mathbb{R}^*,$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \\ -x^2 &\leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \\ \text{or } \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

3.2.3 Suite et limite

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ équivaut, pour toute suite $(U_n)_{n \geq 0}$ d'élément de D_f telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = x_0$ la suite $(f(U_n))$ converge vers l .

Remarque 9

On utilise cette propriété pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limites en un point x_0

Exemple 24

Montrez que la fonction $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

3.2.4 Quelques limites de référence

$$i_1) \forall \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0; \star \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(\beta x) = 0$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\beta x)}{x^\alpha} = 0$$

$$\star \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^{(\beta x)} = 0$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{(\beta x)}} = 0$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

3.2.5 Formes indéterminés

$$\star f + g \text{ pour } f \rightarrow +\infty \text{ et } g \rightarrow -\infty$$

$$\star f \times g \text{ pour } f \rightarrow 0 \text{ et } g \rightarrow \pm\infty$$

- ★ $\frac{f}{g}$ pour $f \rightarrow 0$ et $g \rightarrow 0$ ou $f \rightarrow \pm\infty$ et $g \rightarrow \pm\infty$
- ★ f^g pour $f \rightarrow 1$ et $g \rightarrow \pm\infty$
- ★ f^g pour $f \rightarrow 0^+$ et $g \rightarrow 0$
- ★ f^g pour $f \rightarrow +\infty$ et $g \rightarrow 0$

Exemple 25

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln((1+x)^{\frac{1}{x}})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \text{ car } \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \right.
 \end{aligned}$$

3.2.6 Comparaison locale des fonctions

Soit x_0 , un point appartenant à $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$ et f et g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 .

i_1) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si et seulement si, il existe une fonction $k(x)$ tel que :

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} k(x) = 0$$

on note

$$f(x) = o(g(x))$$

lorsque $x \rightarrow x_0$.

Exemple 26

La fonction $f(x) = \ln(x)$ est négligeable devant $g(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de 0. On peut écrire que :

$$\ln(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

lorsque $x \rightarrow 0$.

$i_2)$ On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 si , il existe une fonction $k(x)$ tel que :

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ et } k(x) \text{ est borné}$$

on note

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

lorsque $x \rightarrow x_0$.

Exemple 27

La fonction $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dominé par $g(x) = x^2$ au voisinage de $+\infty$. On peut écrire que :

$$x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \mathcal{O}(x^2)$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$.

$i_3)$ On dit que f est équivalente à g si et seulement si , il existe une fonction $k(x)$ tel que :

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} k(x) = 1$$

on note

$$f(x) \sim g(x)$$

lorsque $x \rightarrow x_0$.

★ Équivalence usuelles

- $\sin(x) \sim x$; $\tan(x) \sim x$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$; $\ln(1+x) \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$; $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ Tous au voisinage de 0.

- Si $f_1(x) \sim f_2(x)$ et $g_1(x) \sim g_2(x)$ au voisinage de x_0 , alors :
 - ☆ $f_1(x) \times g_1(x) \sim f_2(x) \times g_2(x)$ au voisinage de x_0
 - ☆ $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ au voisinage de x_0
- Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
- Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de x_1 et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = x_1$, alors : $f(h(x)) \sim g(h(x))$ au voisinage de x_0 .

3.3 Continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in [a; b]$

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

3.3.1 Continuité à gauche et continuité à droite de x_0

- On dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

- On dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- Pour que f soit continue en x_0 il faut et il suffit que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \ln(x) \text{ et } x \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[\\ 0 \text{ si } x = 0 \\ e^x \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\end{cases}$$

Solution 7

Calcul de la limite de f à gauche et à droite de $\frac{1}{2}$

•

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\ln(2)$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \sqrt{e}$$

$$\bullet \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$$

Conclusion

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \neq \sqrt{e}$ alors f est discontinue à gauche de $\frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$ alors f est continue à droite de $\frac{1}{2}$.

3.3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle de même nature que l'intervalle antécédent.

$f([a; b]) = [m; M]$ où m et M représentent respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$.

Illustration :

3.3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie de $[a; b]$ vers $\mathbb{R}$ et continue.

$\forall \lambda \in [f(a); f(b)], \quad \exists \alpha \in]a; b[\text{ tel que } f(\alpha) = \lambda.$

Application : On utilise ce théorème pour prouver l'existence des solutions des équations non linéaires de la forme : $f(x) = 0$ sur $[a; b]$.

- Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[a; b]$

3.3.4 Continuité uniforme

La notion de la continuité est une propriété plus forte que la continuité

On dit que f est **uniformément continue** sur $[a; b]$ si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $\forall x_1$ et $x_2 \in [a; b]$

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

Exemple 29

- ★ La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
- ★ La fonction $f(x) = x^2$ est uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a; b]$.

Remarque 10

Toute fonction **Lipschitzienne** sur $[a; b]$ est uniformément continue sur $[a; b]$

3.3.5 Continuité et fonction monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$.

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f([a; b])$

Remarque 11

Les courbes représentatives de f et f^{-1} sont **symétriques par rapport à la première bissectrice** c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Chapitre 4

Dérivabilité

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et est finie.}$$

Si cette limite existe, elle se note $f'(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Remarque 12

★ En posant $h = x - x_0$, la dérivabilité en x_0 revient à :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

★ La dérivabilité de f en x_0 se traduit géométriquement dans un repère orthonormé par l'existence d'une **tangente non parallèles à l'axe des ordonnées**.

Cette tangente (T) a pour équation :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

★ Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, la fonction f n'est pas dérivable en x_0 mais elle admet une **demi-tangente verticale orientée vers le haut s'il s'agit de $+\infty$ et vers le bas dans le cas contraire**.

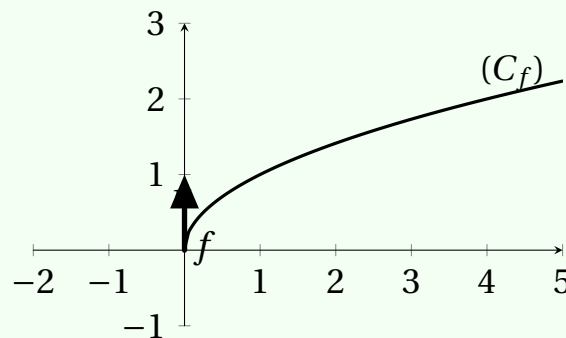
Exemple 30

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= +\infty\end{aligned}$$

Ainsi f n'est pas dérivable en 0 mais admet en 0 une demi-tangente verticale orientée vers le haut.



4.1 Dérivabilité à gauche et à droite

★ On dit que f est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et est finie.}$$

Si cette limite existe, elle se note $f'_g(x_0)$.

★ On dit que f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et est finie.}$$

Si cette limite existe, elle se note $f'_d(x_0)$.

★ Pour que f soit dérivable en x_0 , il faut et il suffit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

4.2 Opération sur les dérivabilités

- ★ $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- ★ $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- ★ $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \lambda \in \mathbb{R}$
- ★ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- ★ $(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = g'(x)(f'(g(x)))$

4.3 Dérivabilité et continuité

- ★ f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I .
- ★ Si f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en ce point mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

4.4 Dérivabilité et fonction réciproque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I , strictement monotone sur I telle que : $\forall x \in I; f'(x) \neq 0$
 f réalise alors une bijection réciproque notée f^{-1} .
 f^{-1} est définie sur $f(I)$.

$$f^{-1} : f(I) \rightarrow I, \quad \forall x \in I, \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

En effet $f^{-1} \circ f(x) = x$.

$[f^{-1}(f(x))]' = f'(x) \times (f^{-1})'(f(x))$ on a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) \times (f^{-1})'(f(x)) &= 1 \\ \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} f : \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sin(x)} \end{aligned}$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , dont on dé-

terminera le domaine de définition.

2. Donnez le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'$

4.5 Dérivées successives

Définition 8

★ Si f' est à son tour dérivable, on appelle **fonction dérivée seconde de f'** , la dérivée de f' . On la note f'' .

★ La fonction dérivée d'ordre n ($n \geq 1$) notée : $f^{(n)}$ est la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $(n-1)$.

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Exemple 32

$$f^{(3)} = (f^{(2)})'$$

Remarque 13

$$f^{(0)} = f$$

★ Fonction de classe $C^n(I)$.

Une fonction f est de classe C^n sur I (on note $C^n(I)$) si et seulement si elle est n fois dérivable sur I . C'est à dire que les dérivées $f'; f''; \dots; f^{(n)}$ existent et la fonction dérivée d'ordre n est continue ($f^{(n)}$ est continue)

★ Fonction de classe $C^\infty(I)$.

Une fonction f est de classe C^∞ si elle est **indéfiniment dérivable** sur I .

Exemple 33

$f(x) = e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$g(x) = \ln(x)$ est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$.

☆ Formule de LEIBNIZ

Cette formule permet de généraliser la dérivée du produit de deux fonctions jusqu'à l'ordre n .

Si f et g admettent des dérivées successivement jusqu'à l'ordre n , alors le produit $f \times g$ est dérivable jusqu'à l'ordre n . On a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

$$\mathbb{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Calculez la dérivée d'ordre n de la fonction : $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(\sin(x))$

Exemple 34

4.6 Théorème de Rolle-Théorème des accroissement finis et inégalité des accroissements finis

Théorème 1: Théorème de Rolle

Soit f une fonction dérivable sur $I = [a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$. ($a \neq b$) ;
 $\exists \alpha \in]a, b[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Théorème 2: Théorème des accroissement finis

Soit f une fonction dérivable sur I , a et b deux éléments de I tel que $a < b$.

$$\exists \alpha \in]a, b[\text{ tel que : } f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La droite passant par $f(a)$ est parallèle à (MM') a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

$$(MM') \text{ a pour coefficient directeur } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème 3: Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur I tel que $\exists k > 0 / \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ on a :

$\forall x_1$ et x_2 , deux éléments de I .

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq k \text{ ou } |f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|$$

4.7 Extremum

Théorème 4

★ On dit que f admet un **minimum local** en x_0 si et seulement si $\forall x$ appartenant au voisinage de x_0 ; ($x \rightarrow x_0$ ou $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ où ε est un infinitésimal), on a :

$$f(x) \geq f(x_0)$$

★ On dit que f admet un **maximum local** en x_1 si et seulement si : $\forall x$ appartenant au voisinage de x_1 , on a :

$$f(x) \leq f(x_1)$$

Un **extremum** est soit un **minimum** ou soit un **maximum**

★ **Condition nécessaire :**

Si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

4.8 variation d'une fonction

f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

4.9 Application : Calcul de limite

On utilise cette règle pour calculer la limite des fonctions se mettant sous la forme : $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Règle de l'hôpital

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{ou} \\ & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x) = \infty \quad \text{alors} \\ & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$